(28)

Διαφορικές Εξισώσεις β' τάξης

Είναι οι εξισώσεις μορφής $y'' = F(x, y, y')$

Ⓐ αν δεν εμφανίζεται η άγνωστη συνάρτηση (y)

δηλ. $y'' = F(x, y')$

Θέτουμε $z = y' \rightsquigarrow z' = f(x, z)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

$$y'' + (y')^2 + y' = 0 \quad \text{για } y(0) = 0 \text{ και } y'(0) = 1$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $z = y' \Rightarrow y'' = z'$

Άρα, $z' + z^2 + z = 0 \Rightarrow z' + z = -z^2$

Bernoulli

Θέτω $u = z^{1-2} \Rightarrow u = \frac{1}{z} \Rightarrow u' = -\frac{z'}{z^2}$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε

$$u' - u = 1 \Rightarrow u(x) = e^x \left(c_1 + \int e^{-x} dx \right) = c_1 \cdot e^x - 1$$

Άρα, $y'(x) = \frac{1}{c_1 \cdot e^x - 1} \Rightarrow y = \log|c_1 - e^{-x}| + c_2$

$y(0) = 0 \Rightarrow \log|c_1 - e^0| + c = 0 \Rightarrow \log|c_1 - 1| + c_2 = 0 \quad (1)$

$y'(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{c_1 e^0 - 1} = 1 \Rightarrow c_1 - 1 = 1 \Rightarrow c_1 = 2$

Άρα, (1) $\log|2 - 1| + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Επομένως, $y(x) = \log|1 - e^{-x}|$

ή

Θα μπορούσαμε να κάνουμε ορισμένη

$u' - u = 1$ αλλά $u(0) = \frac{1}{z(0)} = \frac{1}{z'(0)} = 1$ (από 0 έως x)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1i σελ 32)

$$x y'' = y' + x^2 \quad (E)$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $z = y' \Rightarrow z' = y''$

Άρα η (Ε) είναι

$$x z' = z + x^2 \Rightarrow z' - \frac{1}{x} z = x \quad , x \neq 0$$

$$z(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(c + \int x \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right)$$

$$z(x) = e^{\ln|x|} \cdot \left(c + \int x \cdot e^{-\ln|x|} dx \right) =$$

$$= |x| \cdot \left(c + \int \frac{x}{|x|} dx \right) =$$

$$= |x| \cdot \left(c + \int \frac{x}{x \operatorname{sgn} x} dx \right) =$$

$$= |x| \cdot (c + x \operatorname{sgn} x) = c|x| + x^2$$

(B) Δεν εμφανίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή $y'' = F(y, y')$
Θέτω $y' = z \Rightarrow y'' = z$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (2 iv σελ 52)

$$y'' = 2y \cdot y'$$

ΛΥΣΗ

$y' = z$

Έχουμε $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$

Η εξίσωση γίνεται

$z \frac{dz}{dy} = 2y \cdot z$ $\quad$ • αν $z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c$

• αν $z \neq 0 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = 2y \Rightarrow dz = 2y\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow z = y^2 + c_1 \Rightarrow y' = y^2 + c_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dy}{y^2 + c_1} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + c_1} = x + c_1$

• $C_1 = 0 \rightsquigarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y}$

• $C_1 > 0 \rightsquigarrow \int \frac{1}{y^2+c_1}\,dy = \int \frac{1}{y^2+(\sqrt{c_1})^2}\,dy = \frac{1}{c_1}\int \frac{\sqrt{c_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}}}{\left(\frac{y}{\sqrt{c_1}}\right)^2+1}\,dy =$

$= \frac{\sqrt{c_1}}{c_1}\cdot \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{c_1}}\right)$

• $C_1 < 0 \rightsquigarrow \int \frac{1}{y^2-\sqrt{c_1}^2}\,dy = \int \frac{1}{(y-\sqrt{c_1})\cdot(y+\sqrt{c_1})}\,dy =$

$= \log|y-\sqrt{c_1}| + \log|y+\sqrt{c_1}|$

β' τρόπος

$(y')' = (y^2)' \Rightarrow y' = y^2 + C$

Γραμμική εξίσωση β' τάξης (υποβιβασμός)

$y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = q(x)$ (E)

και ομογενής η $y''(x)+P_1(x)y'(x)+P_2(x)\cdot y(x) = 0$ (E_0)

⊛ Αν $y_1 \neq 0$ λύση της (E_0) τότε οι αντικαταστάσεις $y = z y_1$ και $u = z'$ ανάγουν την (E) σε εξ. α' τάξης

Πράγματι για (P_1): $y = z\cdot y_1$ έχουμε:

(P_1): $y' = z'y_1 + zy_1' \Rightarrow y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + 2$

Η (E) γράφεται:

$z''y_1 + 2z'y_1' + P_1 z'y_1 + z\,\overset{0}{\cancel{(y_1''+P_1y'+P_2y_1)}} = q \Rightarrow$

$\Rightarrow z''y_1 + (2y_1' + P_1y_1)z' = q \Rightarrow$

$\overset{z'=u}{\Rightarrow} y_1u' + (2y_1' + p_1y_1)u = q$ (y_1: μερική λύση της (E_0))

Παράδειγμα (Άσκ. 4iii σελ 53)

$x^4\cdot y'' + 2x^3\cdot y' - y = 0$, $x>0$ $y_1 = e^{1/x}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $y_1(x) \neq 0$ $\forall x>0$ και η y_1 μερική λύση της (1) $y = z\cdot e^{1/x} \Rightarrow y' = z'\cdot e^{1/x} + z\cdot(e^{1/x})'$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow y'' = z''\cdot e^{1/x} + 2z'\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x} + z(e^{1/x})''$ (3)

πολ/με τις (1),(2),(3) με -2, $2x^3$ και x^4 αντίστοιχα

Άρα, $x^4 \cdot e^{1/x} \cdot z'' - x^2 \cdot 2z' e^{1/x} + 2x^3 \cdot z' e^{\frac{1}{x}} = 0$

$$x^4 z'' - 2x^2 z' + 2x^3 z' = 0$$

$$x^4 \cdot z'' + 2x^2(x-1) z' = 0$$

$z' = u$, $\quad x^4 \cdot u' - 2x^2(x-1) u = 0$ που είναι γραμμική α' τάξης.

$$u' - \frac{2(x-1)}{x^2} u = 0 \quad \dots \Rightarrow$$

$$\dots \Rightarrow u(x) = c_1 \frac{1}{x^2} e^{-2/x}$$

και $\quad z' = c_1 \frac{1}{x^2} \cdot e^{-2/x} \Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow z(x) = \frac{c_1}{2} \cdot e^{-2/x} + c_2.$$

ΑΣΚΗΣΗ (Φυλλάδιο ασκήσεων στη Α-4)

Έστω

(E) : $y' + p = q$, $x \geq 0$ $\quad p, q \in C([0, +\infty))$

Υποθέτουμε ότι $\exists\, x_0 \geq 0$ και $\mu > 0$ έτσι ώστε

$p(x) \geq \mu$, $x \geq x_0$ και ότι $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$

ΝΔΟ όλες οι λύσεις της (E) τείνουν στο 0 όταν $x \to \infty$.

ΛΥΣΗ

οι λύσεις της (E) δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s) \cdot e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds \right]$$

$$\mu \leq p(x), \ x \in [x_0, x] \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \mu \, ds \leq \int_{x_0}^{x} p(s) ds$$

$$\Rightarrow -(x - x_0)\mu \geq -\int_{x_0}^{x} p(s) ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\mu x + \mu x_0} \geq e^{-\int_{x_0}^{x} p(s) ds} \geq 0$$

Είναι $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-\mu x}\cdot e^{\mu x_0}\right)=0 \quad \mu>0$

όρα, από Θ. Ισοσυγκλινουσών

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}=0$$

και συνεπώς $\lim_{x\to\infty} y(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}=0$

Αρκεί νδο

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\cdot\int_{x_0}^{x} q(s)\cdot e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du}\,ds\right)=0$$

Είναι:

$$H(x)=\frac{\int_{x_0}^{x} q(s)\cdot e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du}\,ds}{e^{\int_{x_0}^{x} P(s)ds}}$$

Άσκηση για το σπίτι;

Για την H(x) θα πάρουμε DLH;;